



0017-9310(94)E0043-T

# Etude théorique de la convection naturelle thermique à l'intérieur d'une calotte cylindrique d'axe horizontal

U-CHEUL SHIN, JOSEPH KHEDARI, CHEIKH MBOW et MICHEL DAGUENET

Laboratoire de Thermodynamique et Energétique, 52 Av. de Villeneuve, 66860 Perpignan Cedex,  
 France

(Reçu le 11 février 1994)

**Résumé**—Les auteurs étudient théoriquement la convection naturelle thermique bidimensionnelle laminaire et permanente, qui se développe dans une calotte cylindrique d'axe horizontal remplie d'air. La résolution, numérique, fait appel aux coordonnées bicylindriques et à la méthode du volume de contrôle développée par Patankar. L'influence des différents paramètres du système, notamment de l'inclinaison par rapport au plan horizontal, du facteur de forme, du nombre de Grashof modifié est étudiée. Les valeurs moyennes et locales des nombres de Nusselt ainsi que les distributions des isothermes et des lignes de fonction de courant sont présentées et discutées. Le transfert de chaleur minimal est obtenu pour des angles d'inclinaison compris entre 30 et 45°. Pour les grandes valeurs du nombre de Grashof, le transfert est accéléré à cause d'écoulements secondaires.

## 1. INTRODUCTION

LA CONVECTION naturelle dans les cavités fermées est très étudiée théoriquement étant donné son importance pratique et les problèmes de principe que peut poser la géométrie de l'enceinte lors de la résolution des équations de transfert. Ainsi, depuis quelques années, on s'intéresse beaucoup à l'espace délimité par deux cylindres horizontaux l'un dans l'autre ou par deux sphères l'une dans l'autre. Les équations sont alors exprimées dans un système de coordonnées bicylindriques ou bisphériques. Bien que délicate, cette procédure est élégante. Lorsque l'enceinte est constituée d'un ensemble de parois sur lesquelles les conditions thermiques diffèrent, la résolution des équations de transfert peut encore être beaucoup plus difficile.

L'Héliothermique fait précisément intervenir des enceintes de géométrie complexe et des conditions aux limites complexes. Par exemple une serre-tunnel est une enceinte formée d'un morceau de cylindre et d'une paroi plane. De telles serres sont utilisées en agriculture, dans l'habitat, comme générateur d'air chaud pour alimenter des séchoirs, etc. Nous nous intéressons ici à de telles géométries et nous tentons de mettre au point un code de calcul ayant un domaine d'utilisation le plus général possible.

Plus précisément, considérons une calotte cylindrique d'axe horizontal, remplie d'air ( $Pr = 0.7$ ), dont la section droite est définie par la hauteur  $a$  et par le facteur de forme,  $\gamma = a/b$  (Fig. 1). On suppose que la dimension de la calotte suivant son axe est très grande et l'on se propose d'étudier la convection

naturelle thermique bidimensionnelle, en régime laminaire et permanent, qui se développe dans le fluide lorsqu'on suppose que la température de la partie cylindrique de l'enceinte est constante et égale à  $T_c$  et que la base plane inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal est traversée par un flux de chaleur de densité  $q$  constante.

## 2. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME ET RÉSOLUTION

Nous posons les hypothèses simplificatrices suivantes:

- (1) dans l'équation de la chaleur, la fonction de dissipation et le terme de pression sont négligeables;
- (2) les propriétés physiques du fluide sont constantes, hormis sa masse volumique  $\rho$  dont les variations en fonction de la température sont à l'origine de la convection naturelle;
- (3) les hypothèses de Boussinesq sont valables.

Dans ces conditions, les équations de transfert s'écrivent, sous forme vectorielle:

équation de continuité

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

équation du mouvement

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} - \mathbf{g} \beta T_d, \quad (2)$$

## NOTATIONS

$a, b$	hauteur et dimension caractéristique du système défini sur la Fig. 1 [m]	$v_{\theta}^*, v_{\eta}^*$	composantes adimensionnelles de la vitesse suivant $\theta$ et $\eta$ , respectivement
$C_p$	capacité calorifique massique à pression constante du fluide [ $\text{J kg}^{-1} \text{K}$ ]	$\mathbf{V}$	vecteur vitesse
$\mathbf{g}$	accélération de la pesanteur [ $\text{m s}^{-2}$ ]	$\Delta V$	volume de contrôle [ $\text{m}^3$ ]
$F, G$	fonctions définies dans l'équation (13)	$x, y, z$	coordonnées cartésiennes [m].
$Gr^*$	nombre de Grashof modifié	<b>Symboles grec</b>	
$h$	coefficient métrique défini dans l'équation (7)	$\alpha$	angle d'inclinaison de l'enceinte par rapport au plan horizontal [ $^\circ$ ]
$H$	valeur adimensionnelle de $h$	$\beta$	coefficient volumique d'expansion thermique du fluide [ $\text{K}^{-1}$ ]
$P$	pression au sein du fluide [at]	$\gamma$	facteur de forme ( $\gamma = a/b$ )
$Pr$	nombre de Prandtl du fluide	$\eta, \theta, z$	coordonnées bicylindriques
$q$	densité du flux de chaleur [ $\text{W m}^{-2}$ ]	$\lambda$	conductivité thermique du fluide [ $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]
$T$	température du fluide [K]	$\nu$	viscosité cinématique du fluide [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]
$T^*$	température adimensionnelle du fluide	$\rho$	masse volumique du fluide [ $\text{kg m}^{-3}$ ]
$T_c$	température de la paroi cylindrique [K]	$\psi, \psi^*$	fonction de courant et fonction de courant adimensionnelle respectivement
$T_d$	écart de température $T_d = T - T_c$ [K]	$\omega, \omega^*$	vorticité et vorticité adimensionnelle, respectivement.
$T_p$	température moyenne de la paroi plane [K]	Les nombres décimaux sont écrits avec un "point".	
$t$	temps [s]		
$u, v$	composantes de la vitesse suivant $x$ et $y$ , respectivement [ $\text{m s}^{-1}$ ]		
$v_{\theta}, v_{\eta}$	composantes dimensionnelles de la vitesse suivant $\theta$ et $\eta$ respectivement [ $\text{m s}^{-1}$ ]		

équation de la chaleur

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla^2 T. \quad (3)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (4a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4b)$$

Il est commode d'introduire la fonction de courant  $\psi$  où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées cartésiennes définies sur la Fig. 1. telle que :

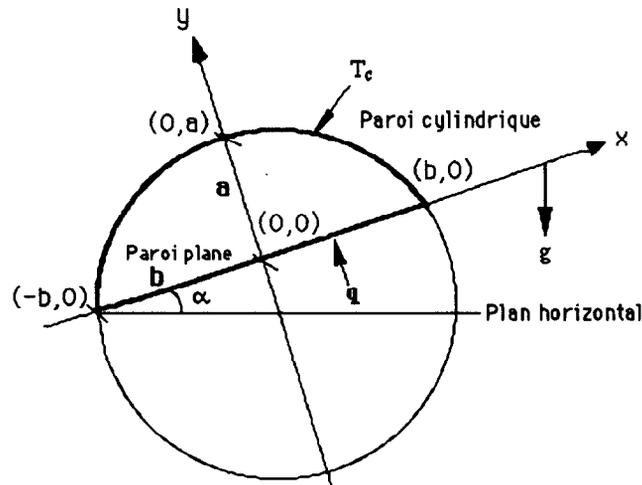


FIG. 1. Section droite de la calotte cylindrique d'axe horizontal et définition des coordonnées.

En introduisant la vorticité  $\omega$  de façon à éliminer le gradient de pression, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{5}$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \mathbf{g}\beta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \tag{6}$$

2.1. Transformation du système d'équations en coordonnées bicylindriques et adimensionnalisation

Pour résoudre notre problème, il est commode d'introduire les coordonnées bicylindriques  $(\eta, \theta, z)$ , (Fig. 2) [1, 2]. Dans ce système, la base plane est représentée par  $\theta = \pi$ , et la partie cylindrique par  $\theta = \theta_c = \text{constant}$  ( $\pi/2 \leq \theta_c < \pi$ ). Cette dernière est liée au facteur de forme de la calotte par la relation suivante :

$$\theta_c = 2 \tan^{-1}(a/b). \tag{7}$$

Le passage des coordonnées cartésiennes  $x, y$  aux coordonnées bicylindriques s'effectue à l'aide des formules de transformation suivantes :

$$x = \frac{b \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta}, \tag{8a}$$

$$y = \frac{b \sin \theta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta}, \tag{8b}$$

$$h = h_\theta = h_\eta = \frac{b}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta}. \tag{8c}$$

En prenant respectivement  $a, \mu/(\rho \cdot a)$  et  $\lambda/(\dot{q} \cdot a)$  comme longueur, vitesse et température de référence, on définit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$b^* = \frac{b}{a} \quad H = \frac{h}{a}$$

$$v_\eta^* = v_\eta \frac{\rho a}{\mu} \quad v_\theta^* = v_\theta \frac{\rho a}{\mu}$$

$$\Psi^* = \frac{\rho \Psi}{\mu} \quad \omega^* = \frac{\rho \omega a^2}{\mu}$$

$$T^* = \frac{\lambda}{q a} (T - T_c) \tag{9}$$

Introduisons encore :

le nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda};$$

le nombre de Grashof modifié :

$$Gr^* = \frac{\mathbf{g}\beta a^4}{\nu^2 \lambda} q.$$

Le système d'équations, en coordonnées bicylindriques, s'écrit alors en utilisant le formalisme vorticité-fonction de courant sous forme adimensionnelle :

équation de continuité :

$$\frac{1}{H} \frac{\partial v_\eta^*}{\partial \eta} + \frac{1}{H} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} = 0, \tag{10}$$

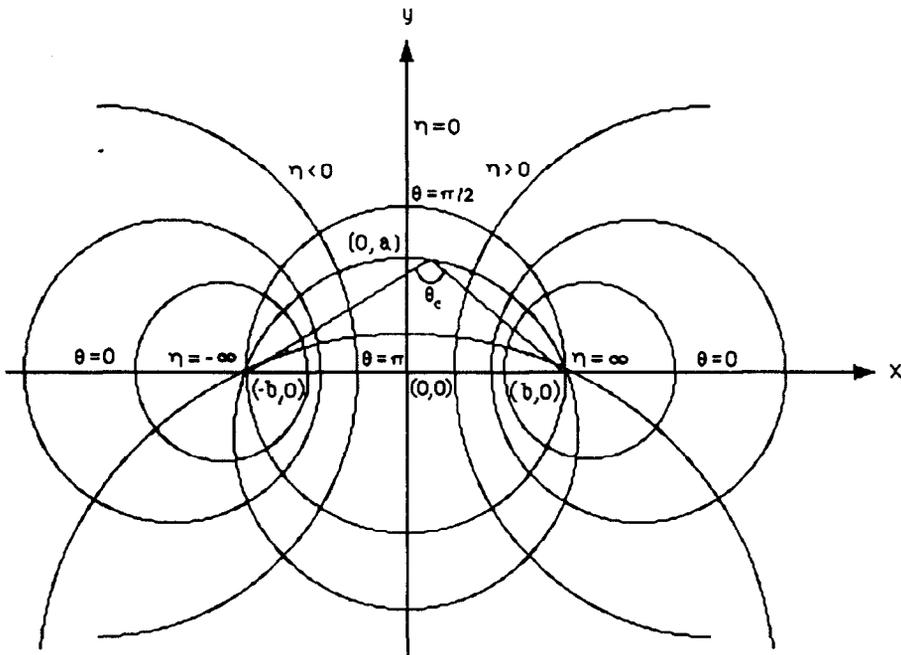


FIG. 2. Coordonnées bicylindriques.

où  $v_\theta^*$ ,  $v_\eta^*$  sont les composantes adimensionnelles de la vitesse suivant  $\theta$  et  $\eta$ , respectivement :

$$v_\eta^* = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}, \quad (11a)$$

$$v_\theta^* = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}, \quad (11b)$$

équation de la vorticité :

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right), \quad (12)$$

équation du tourbillon :

$$\begin{aligned} & \frac{v_\eta^*}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{v_\theta^*}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \\ &= \frac{Gr^*}{H} \left( [F(\eta, \theta) \cos \alpha + G(\eta, \theta) \sin \alpha] \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right. \\ & \quad \left. + [F(\eta, \theta) \sin \alpha - G(\eta, \theta) \cos \alpha] \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{H^2} \nabla^2 \omega^*, \end{aligned} \quad (13)$$

avec :

$$F(\eta, \theta) = \frac{1 - \operatorname{ch} \eta \cos \theta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta}$$

$$G(\eta, \theta) = \frac{\operatorname{sh} \eta \sin \theta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta}$$

équation de la chaleur

$$\frac{v_\eta^*}{H} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + \frac{v_\theta^*}{H} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{H^2} \nabla^2 T^*. \quad (14)$$

## 2.2. Conditions aux limites

Conditions sur la paroi plane

$$v_\eta^* = v_\theta^* = 0, \quad (15a)$$

$$\psi^* = 0, \quad (15b)$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2}, \quad (15c)$$

$$-\lambda \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = q_{\text{constant}}. \quad (15d)$$

Le gradient de température sur cette paroi peut être déterminé, à partir de la définition de la température adimensionnelle, de la façon suivante :

$$\frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{q}{\lambda H} \frac{\partial T^*}{\partial \theta}. \quad (16)$$

En introduisant l'équation (16) dans l'équation (15d), il vient :

$$\frac{1}{H} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = -1. \quad (17)$$

Conditions sur la paroi cylindrique

$$v_\eta^* = v_\theta^* = 0, \quad (18a)$$

$$\psi^* = 0, \quad (18b)$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2}, \quad (18c)$$

$$T^* = 0. \quad (18d)$$

## 2.3. Nombres de Nusselt

On définit le nombre local de Nusselt ( $Nu$ ) sur la paroi plane chauffée comme suit [3] :

$$Nu = \frac{ha}{\lambda}, \quad (19)$$

avec

$$h = \frac{q}{(T_p - T_c)}, \quad (20)$$

où  $T_p$  est la température de la paroi plane.

En utilisant les grandeurs adimensionnelles, ce nombre de Nusselt peut s'écrire :

$$Nu = \frac{1}{T_p^*}. \quad (21)$$

Le nombre de Nusselt moyen ( $\overline{Nu}$ ), quant à lui, est défini par :

$$\overline{Nu} = \frac{\int_{\eta^-}^{\eta^+} Nu H d\eta}{\int_{\eta^-}^{\eta^+} H d\eta}. \quad (22)$$

## 2.4. Résolution numérique

La résolution numérique des équations (10)–(14) avec les conditions aux limites (15)–(18) s'effectue à l'aide de la méthode du volume de contrôle développée par Patankar [4,5] dans laquelle les pas d'intégrations, constants, définis dans le maillage bicylindrique par :

$$\Delta \eta = \frac{\eta^+ - \eta^-}{NI - 1} \quad \Delta \theta = \frac{\pi - \theta_c}{NJ - 1}, \quad (23)$$

sont précisément égaux aux côtés du volume de contrôle.

$NI$  et  $NJ$  sont, respectivement, les nombres de points considérés suivant  $\eta$  et  $\theta$ . Nous retenons les valeurs suivantes :  $NI = 40$  et  $NJ = 31$ . Remarquons que le maillage est arrêté aux points  $\eta^+$  et  $\eta^-$  voisins des deux points  $\eta = \pm \infty$  car suivant (23), le pas  $\Delta \eta$  n'est pas défini à l'infini.

Le processus itératif utilisé pour résoudre les équations (12)–(14) est celui de la méthode de "Gauss-Seidel row iteration" qui demande seulement la conversion d'une matrice tridiagonale. Cette dernière peut être résolue avec l'algorithme de Thomas [6].

Le processus est répété jusqu'à ce que la critère de convergence suivant soit satisfait :

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i,j} |\psi^{n+1}(i,j) - \psi^n(i,j)|}{\sum_{i,j} |\psi^{n+1}(i,j)|} < 10^{-5}. \quad (24)$$

Pour la formulation numérique détaillée du problème, nous renvoyons le lecteur à la référence [7].

### 3. RESULTATS NUMERIQUES

#### 3.1. Conditions de calcul

Nous envisageons les trois calottes définies par les facteurs de forme suivants:  $\gamma = 1$ ,  $\gamma = 0.762$  et  $\gamma = 0.577$ . Pour chaque calotte, nous donnons à l'angle d'inclinaison  $\alpha$  les valeurs suivantes:  $\alpha = 0^\circ$ ;  $\alpha = 15^\circ$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\alpha = 45^\circ$  et  $\alpha = 60^\circ$ . Quant au nombre de Grashof modifié  $Gr^*$ , il varie entre 10 et  $2 \times 10^6$ .

#### 3.2. Nombre de Nusselt moyen ( $\overline{Nu}$ )

Le tableau 1 rassemble les valeurs de  $\overline{Nu}$  calculées pour différents angles d'inclinaison et pour quelques valeurs du nombre de Grashof modifié  $Gr^*$ .

Nous remarquons que, pour  $Gr^* < 10^4$ , les écarts entre les résultats relatifs aux différents angles d'inclinaison  $\alpha$  sont très faibles.

Pour  $Gr^* > 10^4$ , l'augmentation de  $\alpha$  conduit à des écarts plus importants entre les valeurs de  $\overline{Nu}$ .

La Fig. 3 montre les variations du nombre de Nusselt moyen ( $\overline{Nu}$ ) sur la paroi plane en fonction du nombre de Grashof modifié ( $Gr^*$ ) pour les différentes valeurs de  $\gamma$  dans le cas où l'angle d'inclinaison ( $\alpha$ ) est égal à  $0^\circ$ .

Pour les faibles valeurs de  $Gr^*$  ( $Gr^* < 10^4$ ), le profil, quasi plat, montre que les échanges de chaleur sont dominés par la conduction pure. Avec l'augmentation de  $Gr^*$  ( $Gr^* > 10^4$ ), la convection naturelle devient plus importante et l'échange de chaleur s'accroît, conduisant ainsi à des nombres de Nusselt moyens plus élevés.

Le facteur ( $\gamma$ ) affecte la valeur du nombre de Nusselt moyen et la valeur maximale de  $\overline{Nu}$  est observée pour  $\gamma = 1$ . Les écarts entre les courbes, qui restent constants aux faibles valeurs de  $Gr^*$ , deviennent progressivement plus grands avec l'accroissement de  $Gr^*$ . Pour  $Gr^* = 2 \times 10^6$  et  $\gamma = 1$ , les valeurs de  $\overline{Nu}$  sont de 12.9% à 29.1% plus élevées que celles correspondant à  $\gamma = 0.762$  et à  $\gamma = 0.577$ , respectivement. Cependant, l'allure des courbes est la même pour toutes les valeurs du facteur de forme.

Tableau 1. Valeurs du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$

$\gamma$	$Gr^*$	Angle d'inclinaison ( $\alpha$ )				
		$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
1.0	10	2.68	2.68	2.68	2.68	2.68
	$10^4$	3.64	3.53	3.51	3.52	3.52
	$2 \times 10^6$	9.61	9.26	8.74	8.64	8.63
0.762	10	2.40	2.40	2.40	2.40	2.40
	$10^4$	3.32	3.32	3.14	3.16	3.16
	$2 \times 10^6$	8.51	8.35	8.09	7.89	7.87
0.577	10	2.21	2.21	2.21	2.21	2.21
	$10^4$	2.99	2.90	2.84	2.85	2.86
	$2 \times 10^6$	7.45	7.36	7.29	7.26	7.14

Pour  $Gr^* = 2 \times 10^6$ , la Fig. 4 montre, pour chaque configuration, que le nombre de Nusselt moyen diminue quand  $\alpha$  augmente jusqu'à un certain angle à partir duquel il croît à cause de l'apparition d'écoulements secondaires (Figs. 12 et 13). Cet effet de l'inclinaison est d'autant plus faible que la valeur du facteur de forme est petite. Dans le cas où  $\gamma = 0.577$ , la courbe est presque plate. Les valeurs maximales de  $\overline{Nu}$  s'obtiennent pour  $\alpha = 0^\circ$ .

#### 3.3. Nombre de Nusselt local $Nu$ sur la paroi plane

Pour faciliter la comparaison entre les nombres de Nusselt, nous introduisons le rapport  $Nu/\overline{Nu}$ .

Pour une faible valeur du nombre de Grashof ( $Gr^* = 10$ ) et pour  $\gamma = 1$  (Fig. 5), on constate qu'en dépit de la croissance de l'angle d'inclinaison, les variations du rapport  $Nu/\overline{Nu}$  sont identiques et symétriques par rapport au point de coordonnées  $\eta = 0$  et  $\theta = \pi$ . Ceci confirme que l'échange de chaleur est dominé par le mécanisme de la conduction. Les valeurs minimales de  $Nu/\overline{Nu}$  sont localisées au point  $\eta = 0$  à partir duquel  $Nu/\overline{Nu}$  augmente. Notons que le rapport  $Nu/\overline{Nu}$  ne dépend pas de  $\gamma$  de façon décelable.

Le nombre de  $Gr^*$  influe beaucoup les distributions de  $Nu/\overline{Nu}$  (Fig. 6) notamment aux grandes valeurs. Les valeurs minimales de  $Nu/\overline{Nu}$  sont déplacées vers les grandes valeurs positives de  $\eta$  lorsque  $\alpha$  augmente. A partir de  $\alpha = 30^\circ$ , les valeurs de  $Nu/\overline{Nu}$  deviennent identiques. Ce phénomène s'explique par l'extension de l'écoulement de gauche.

La Fig. 7 montre les variations de  $Nu/\overline{Nu}$  pour  $\gamma = 0.577$  avec  $Gr^* = 2 \times 10^6$ . Les courbes sont semblables à celles correspondant à  $\gamma = 1$ . Cependant, les valeurs de  $Nu/\overline{Nu}$  pour les angles  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  et  $\alpha = 60^\circ$  sont assez différentes. En effet, les fonctions de courant des cellules secondaires, de sens opposé, apparaissant aux angles d'inclinaison précédents, sont plus élevées et ces cellules repoussent la cellule principale vers le sein de l'enceinte.

#### 3.4. Isothermes et fonctions de courant

Les Figs. 8–13 donnent les variations des rapports de la valeur de la fonction de courant adimensionnelle ( $\psi^*$ ) à sa valeur maximale ( $\psi^*_{\max}$ ) et de la température du fluide adimensionnelle ( $T^*$ ) à la valeur moyenne de la température adimensionnelle de la paroi plane ( $\overline{T^*}_p$ ).

Pour  $\gamma = 1$  et  $\alpha = 0$  (Figs. 8 et 9), les isothermes et les lignes de la fonction de courant sont symétriques par rapport au plan vertical passant par le point de coordonnées  $\eta = 0$ . Du côté gauche de ce plan, l'écoulement tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (+). Du côté droit, il est de sens contraire (-).

Pour  $Gr^* = 10$  (Fig. 8), les isothermes sont parallèles au contour de la paroi cylindrique et l'écoulement est très lent. Avec l'augmentation de  $Gr^*$  ( $Gr^* = 2 \times 10^6$ ) (Fig. 9), les isothermes pénètrent au sein de l'enceinte traduisant ainsi l'influence de la paroi plane chaude (les isothermes se dirigent vers le

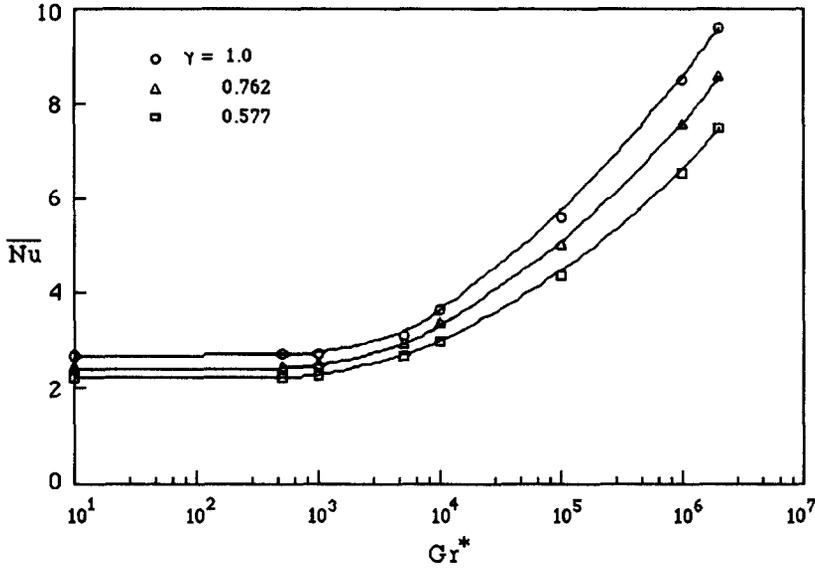


FIG. 3. Variations du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  en fonction du nombre de Grashof modifié  $Gr^*$  pour différents facteurs de forme  $\gamma$ .

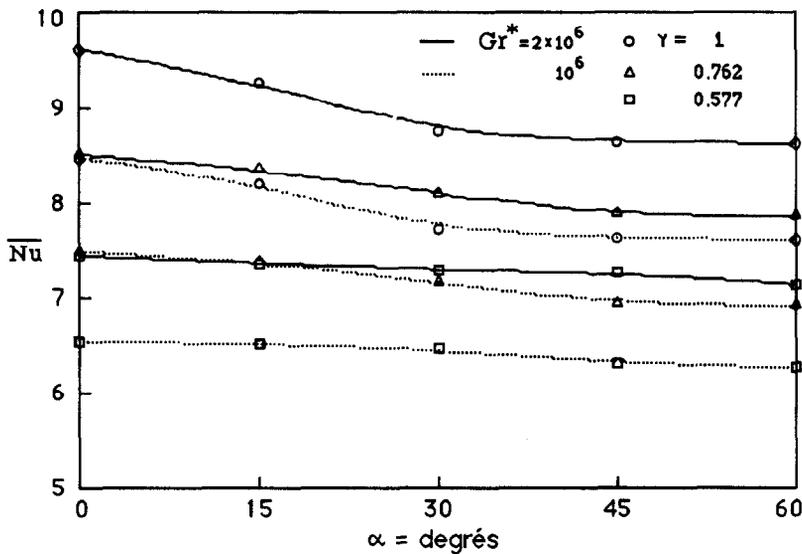


FIG. 4. Variations du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $\gamma$  et de  $Gr^*$ .

haut) ainsi que de la paroi froide (les isothermes sont comprimées vers le centre) et l'écoulement est plus rapide.

Quand  $\alpha$  augmente (Fig. 10), les isothermes sont semblables à celles obtenues dans le cas où  $\gamma = 1$  et  $\alpha = 0^\circ$  (Fig. 8), ce qui est en parfait accord avec les résultats trouvés dans le paragraphe (3) (Fig. 3). En effet, en dépit des petites valeurs de la fonction de courant, l'écoulement de la zone gauche gagne la zone droite.

Une valeur élevée de  $Gr^*$  ( $Gr^* = 2 \times 10^6$ ) accentue ce phénomène et la cellule de gauche devient prépondérante (Fig. 11). La position de la température maximale se déplace progressivement vers la partie

supérieure de la plaque et le centre de la distribution de la température se situe en haut l'enceinte.

Lorsque l'angle d'inclinaison est de  $30^\circ$ , pour la plus petite valeur du facteur de forme ( $\gamma = 0.577$ ) et pour  $Gr^* = 2 \times 10^6$ , il se développe, dans la zone gauche, un autre écoulement, de même sens que celui déjà existant (Fig. 12). Pour  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 0.762$ , ces écoulements se produisent lorsque l'angle d'inclinaison  $\alpha$  est égal à  $45^\circ$  avec  $Gr^* = 2 \times 10^6$  (Fig. 13).

**4. CONCLUSION**

En introduisant la vorticité, la fonction de courant et les coordonnées bicylindriques, nous avons étudié

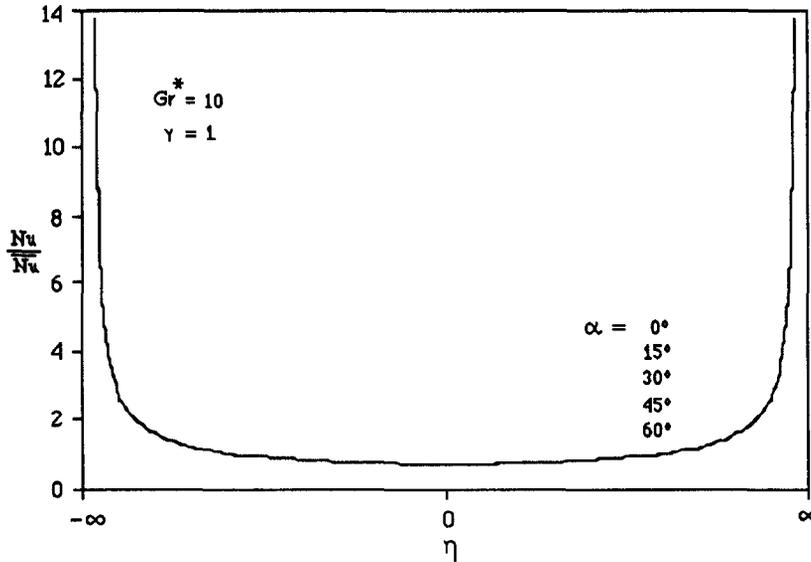


FIG. 5. Variations du rapport  $Nu/\overline{Nu}$  en fonction de  $\eta$  pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .

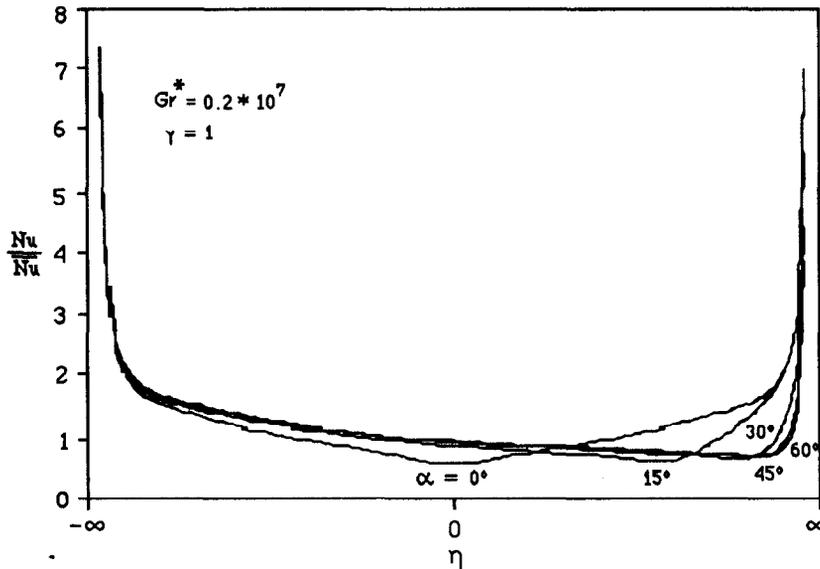


FIG. 6. Variations du rapport  $Nu/\overline{Nu}$  en fonction de  $\eta$  pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .

théoriquement la convection naturelle thermique bidimensionnelle laminaire et permanente, qui se développe dans une calotte cylindrique d'axe horizontal. Un code de calcul numérique basé sur la méthode du volume de contrôle de Patankar a été mis au point.

Les trois calottes étudiées sont définies par les facteurs de forme suivant :  $\gamma = 1$ ,  $\gamma = 0.762$  et  $\gamma = 0.577$ . Pour chaque calotte, nous avons considéré cinq valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  par rapport au plan horizontal :  $\alpha = 0^\circ$  ;  $\alpha = 15^\circ$  ;  $\alpha = 30^\circ$  ;  $\alpha = 45^\circ$  et  $\alpha = 60^\circ$ . Les simulations numériques ont été exécutées pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié  $Gr^*$  (de 10 à  $2 \times 10^6$ )

Les résultats mettent en évidence l'influence du fac-

teur de forme sur la valeur du nombre de Nusselt moyen ( $\overline{Nu}$ ) : plus le facteur est petit, plus  $\overline{Nu}$  est petit.

Pour de faibles valeurs de  $Gr^*$ , en dépit du changement de l'inclinaison, le coefficient d'échange de chaleur est dominé par le mécanisme de la conduction pour les différents facteurs de forme.

En outre, quel que soit  $\gamma$ , la valeur maximale de  $\overline{Nu}$  est observée lorsque  $\alpha = 0^\circ$  tandis que la valeur minimale, se situe entre  $\alpha = 30^\circ$  et  $\alpha = 45^\circ$ . Aux grands angles d'inclinaison,  $\overline{Nu}$  augmente à cause de l'apparition d'écoulements secondaires. Cet effet de l'inclinaison est affaibli par une diminution du facteur de forme.

L'utilisation des coordonnées bicylindriques semble donc bien adaptée pour résoudre ce type de problème

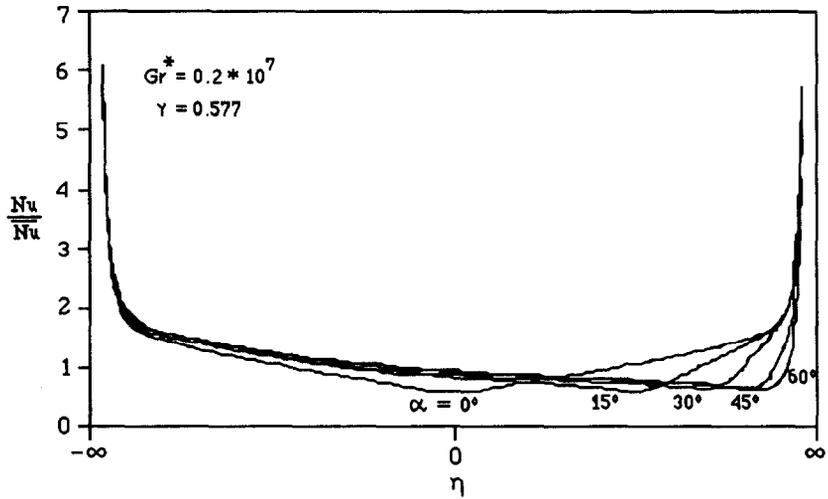


FIG. 7. Variations du rapport  $Nu/\overline{Nu}$  en fonction de  $\eta$  pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .

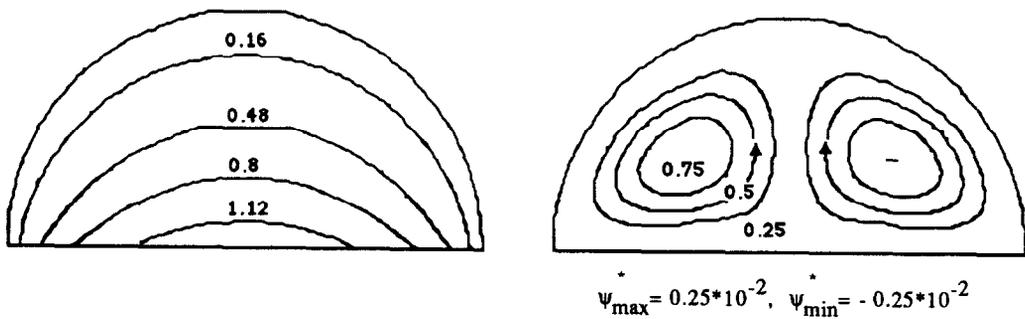


FIG. 8. Evolution des isothermes ( $T^*/T_p^*$ ) et des lignes de courant ( $\psi^*/\psi_{max}^*$ ) pour  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 0^\circ$ , et  $Gr^* = 10$ .

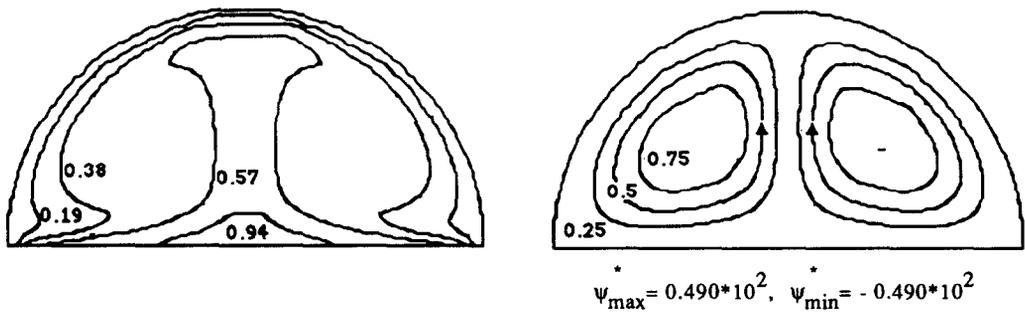


FIG. 9. Evolution des isothermes ( $T^*/T_p^*$ ) et des lignes de courant ( $\psi^*/\psi_{max}^*$ ) pour  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 0^\circ$ , et  $Gr^* = 2 \times 10^6$ .

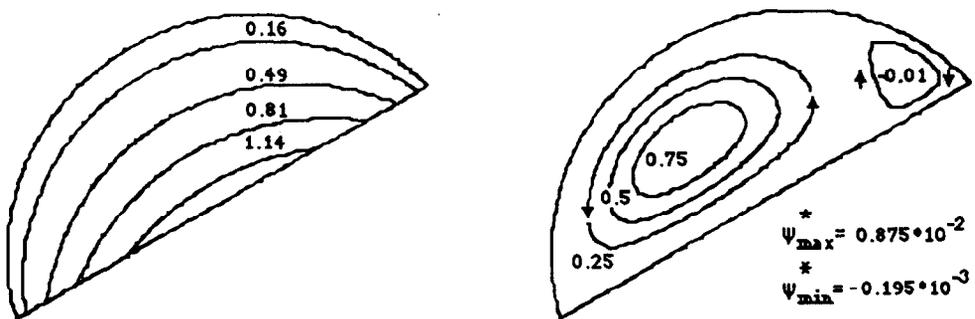


FIG. 10. Evolution des isothermes ( $T^*/T_p^*$ ) et des lignes de courant ( $\psi^*/\psi_{max}^*$ ) pour  $\gamma = 0.762$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , et  $Gr^* = 10$ .

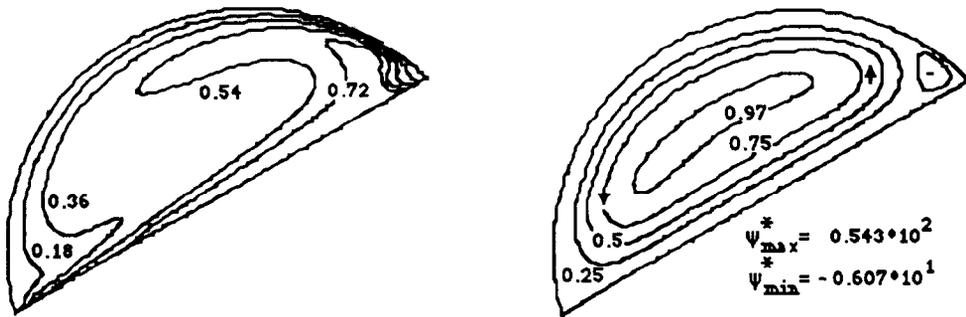


FIG. 11. Evolution des isothermes ( $T^*/T_p^*$ ) et des lignes de courant ( $\psi^*/\psi_{max}^*$ ) pour  $\gamma = 0.762$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , et  $Gr^* = 2 \times 10^6$ .

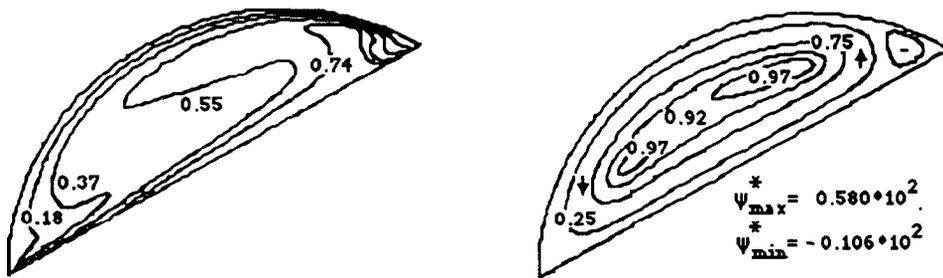


FIG. 12. Evolution des isothermes ( $T^*/T_p^*$ ) et des lignes de courant ( $\psi^*/\psi_{max}^*$ ) pour  $\gamma = 0.577$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , et  $Gr^* = 2 \times 10^6$ .

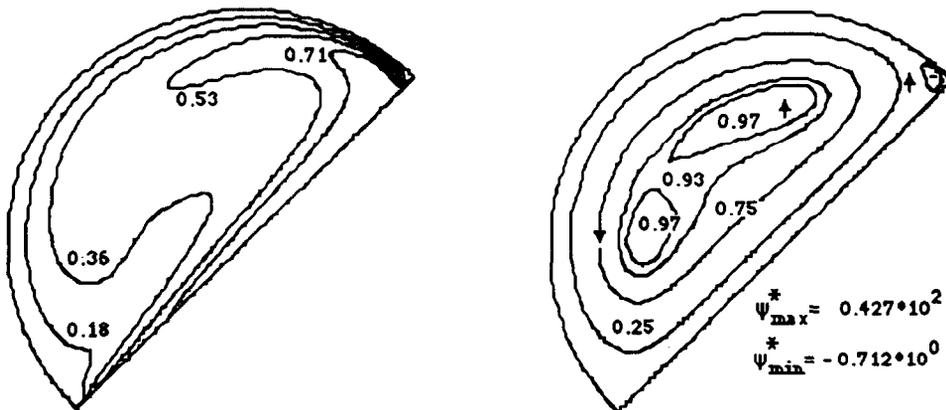


FIG. 13. Evolution des isothermes ( $T^*/T_p^*$ ) et des lignes de courant ( $\psi^*/\psi_{max}^*$ ) pour  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ , et  $Gr^* = 2 \times 10^6$ .

que pose souvent l'Héliothermique. D'une manière générale, pour certaines géométries de parois complexes, l'utilisation de coordonnées bipolaires, voire de transformations homotopiques, mériterait d'être plus fréquemment tentée. Actuellement, nous essayons d'augmenter les performances de notre code de calcul afin de pouvoir traiter d'autres enceintes bidimensionnelles délimitées par deux parois.

**REFERENCES**

1. P. Moon and D. E. Spenser, *Field Theory Handbook*. Springer, Berlin (1971).
2. P. Moon and D. E. Spenser, *Field Theory Engineers*. D. Van Nostrand, Toronto (1961).
3. S. V. Patankar, S. Ramadhyani and E. M. Sparrow, Effect of circumferentially nonuniform heating on laminar combined convection in a horizontal tube, *J. Heat Transfer* **100**, 63-70 (1978).
4. S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York (1980).
5. S. V. Patankar, A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations, *Numer. Heat Transfer* **4**, 409-425 (1981).
6. William F. Ames, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press, New York (1977).
7. U-C. Shin, Etude de la convection naturelle thermique à l'intérieur d'une calotte cylindrique d'axe horizontal, Thèse de Doctorat, Université de Perpignan (1993).

THEORETICAL STUDY OF THE NATURAL CONVECTION IN AIR-FILLED  
INCLINED ENCLOSURE

**Abstract**—Natural convection in air-filled, inclined enclosure is numerically studied by using Patankar's method. The enclosure was composed of the partial horizontal cylinder limited by a plate. Calculation was carried out for a wide range of modified Grashof number ( $Gr^*$ ) at three aspect ratios of enclosure and the heat transfer rate and mode of natural convection were determined. The minimum heat transfer rate was found to occur at 30–45° of inclination. At high  $Gr^*$ , the heat transfer is affected by secondary buoyancy forces, generated by the inclination. The utilization of the bicylindrical coordinates seems well adapted for the study of this type of enclosures and must frequently applied for different practical problems. Now, we try to improve the performances of our calculation code to be used for the study of other enclosures which are limited by two planes.